

本文原刊于《自然科学史研究》第 26 卷第 3 期 (2007 年 7 月)
第 312-323 页。

从《算数书》盈不足问题看上古时代的盈不足方法

邹大海

(中国科学院自然科学史研究所, 北京 100010)

提 要 盈不足方法是古代数学中一项具有一般性的重要方法。通过将《算数书》和《九章算术》及其他文献结合起来, 探讨它在中国上古时代的形成与流传。认为: 先秦时期实际工作中经常出现某种东西过多或过少的情况, 为了得到合适的数量, 人们通过运用比、比例和分数的知识, 找到了解决问题的盈不足方法。这种方法及其应用形成了先秦数学的一个科目——赢不足, 并记载于《九章算术》在先秦的祖本中。受它直接或间接的影响, 先秦到汉代的学者们根据需要设置了很多盈不足问题。《算数书》中的盈不足问题即由此而来。

关键词 盈不足方法 算数书 九章算术 上古数学

中图分类号 N092:0112

文献标识码 A **文章编号** 1000-0224 (2007) 03-0312-12

盈不足方法是中国古代一项非常重要的数学成就, 它曾对世界数学产生过很大影响^[1, 2]。在中国传统数学最重要的经典《九章算术》中专有一章介绍它的各种形式及其用法。这是以往所知关于盈不足方法的最早记录。由于它没有用到《九章》方程章已出现的负数, 所以过去钱宝琮先生说盈不足章的写成在东汉以前 (钱先生把《九章》的编定拟在东汉初期)^[3]。1983 年和 1984 年之交湖北江陵张家山 247 号墓出土的《算数书》中有盈不足类问题, 由于该墓墓主约于公元前 186 年去世 ([4], 前言 1 页), 因此盈不足问题的下限可推到公元前 2 世纪的初期。邹大海曾指出《算数书》没有出现盈不足术的完整表达, 其盈不足类问题应看成是此前已有盈不足方法的应用或变通^[5, 6]^①, 但未具体分析。本文拟将《九章算术》和《算数书》中有关盈不足问题的材料结合起来, 再参考其他文献, 对上古时代的盈不足方法进行一个较为系统的考察。

1 《九章算术》中的盈不足方法

收稿日期: 2007-04-06

作者简介: 邹大海, 1965 年生, 湖南新化人, 中国科学院自然科学史研究所中德合作研究项目研究员, 主要研究中国早期科学思想史、中国数学史。

基金项目: 国家自然科学基金“《算数书》与先秦数学”(项目类别: A, 编号: 10171107)

^① 后来, 古克礼 (Christopher Cullen) 先生亦认为《算数书》“分钱”条的解法不完整。([7], 81 页)

为了便于说明，首先对《九章算术》盈不足章做一简单的介绍和讨论。

该章首先列了四个问题，都具有如下的形式（不妨称为“共买物”）：

设有若干个人一起出钱买某个物品，已知每个人出钱数为 a_1 时，就多余（盈） b_1 钱，而每个人出钱数为 a_2 时，就不足 b_2 钱。问该物品的价钱、一起购买该项物品的人数分别是多少？

该章前 3 个问题都只有答案没有方法，在第 4 个问题的答案下列有方法：

盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。其一术曰：并盈不足为实。以所出率以少减多，余为法。实如法得一人。以所出率乘之，减盈、增不足即物价。（[8]，74 页）

这里，《九章》把 a_1 、 a_2 称为所出率， b_1 和 b_2 分别称为盈和不足。它给出的解法盈不足术可以用现代的方式表示为：

先摆好数字阵：
$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array}$$
，然后把对角线上的两个数分别相乘再相加，得到

的和数作为被除数，称为实： $a_1 b_2 + a_2 b_1 \cdots \cdots$ (1)

再把 b_1 和 b_2 相加，和数作为除数，称为法： $b_1 + b_2 \cdots \cdots$ (2)

然后用法除实，即： $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \div (b_1 + b_2) \cdots \cdots$ (3)

《九章》没说 (3) 是什么。据刘徽在该章第 9 问的注释“求其不盈不朒之数”，知 (3) 为使得所出总钱数比物价不多也不少的人均出钱数。

再以两次假设人均出钱数（所出率）之差为除数，亦称为法： $a_1 - a_2 \cdots \cdots$ (4)
以此分别去除上面所得的实 (1) 和法 (2)，得到：

物品价钱= $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \div (a_1 - a_2) \cdots \cdots$ (5)

出钱人数= $(b_1 + b_2) \div (a_1 - a_2) \cdots \cdots$ (6)

之后，《九章》又利用 (6) 给出了求物品价钱的另一个算法：

$[(b_1 + b_2) \div (a_1 - a_2)] \times a_1 - b_1 = [(b_1 + b_2) \div (a_1 - a_2)] \times a_2 + b_2 \cdots \cdots$ (7)

上述算法中，预设两次所出总钱数与物品价钱相比时，都是一次为盈一次为不足。但有时候会出现两次都是盈，或两次都是不足的情况；还有时候会出现一次盈一次正好或一次不足一次正好好的情况。这 4 种情况分别称为两盈、两不足、盈适足、不足适足。《九章算术》也都记载了相应的算法。

盈不足章在给出了一个两盈（第 5 题）和一个两不足问题（第 6 题）后，在后者下统一表述了针对两种情况的方法：

两盈两不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，以少减多，余为实。两盈、两不足以少减多，余为法。实如法而一。有分者，通之。两盈、两不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。其一术曰：置所出率，以少减多，余为法。两盈、两不足以少减多，余为实。实如法而一，得人数。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价。（[8]，75 页）

这里给出了 2 个方法，前一个相当于：

能使出钱不多不少的人均出钱数= $|a_1 b_2 - a_2 b_1| \div |b_1 - b_2| \cdots \cdots$ (8)

物价= $|a_1 b_2 - a_2 b_1| \div |a_1 - a_2| \cdots \cdots$ (9)

$$\text{人数} = |b_1 - b_2| \div |a_1 - a_2| \cdots \cdots \quad (10)$$

后一个方法是，人数仍如(10)。当 b_1 、 b_2 为两盈、两不足时，物价分别为：

$$(|b_1 - b_2| \div |a_1 - a_2|) \times a_1 - b_1 = (|b_1 - b_2| \div |a_1 - a_2|) \times a_2 - b_2 \cdots \cdots \quad (11)$$

$$(|b_1 - b_2| \div |a_1 - a_2|) \times a_1 + b_1 = (|b_1 - b_2| \div |a_1 - a_2|) \times a_2 + b_2 \cdots \cdots \quad (12)$$

上述公式采用绝对值符号系图方便，它仅反映古人是从较大的数中减去较小的数(“以少减多”)，并非表示古人有绝对值的概念。

该章在给出了一个一盈一适足(第7题)和一个一不足一适足问题(第8题)后，统一表述了这两种情形的算法：

盈适足、不足适足术曰：以盈及不足之数为实。置所出率，以少减多，余为法。实如法得一人。其求物价者，以适足乘人数，得物价。([8], 76页)

意思是，对于盈适足的情形 ($a_1 > a_2$)，有：

$$\text{人数} = b_1 \div (a_1 - a_2) \cdots \cdots \quad (13)$$

$$\text{物价} = [b_1 \div (a_1 - a_2)] \times a_2 \cdots \cdots \quad (14)$$

对于不足适足的情形 ($a_1 < a_2$)，有：

$$\text{人数} = b_1 \div (a_2 - a_1) \cdots \cdots \quad (15)$$

$$\text{物价} = [b_1 \div (a_2 - a_1)] \times a_2 \cdots \cdots \quad (16)$$

由于导致适足的正是使出钱总数不多不少的人均出钱数，所以此术中并没有对应于式(1)的计算方法。

从问题形式看，盈不足类问题可分为一盈一不足、两盈、两不足、一盈一适足、一不足一适足5种情形，但《九章》从方法上归类，把第2和第3作为同种类型，第4和第5也作为同种类型来处理。在介绍这3种典型问题及其解法之后，《九章》盈不足章给出了12个本身并不涉及盈不足的问题，但此书通过假设两次答案，算出对应的结果和已知总数的差，得到盈和不足两个数值，然后再用盈不足术求解。上面讲到的盈不足，两盈、两不足，盈适足、不足适足3种情形，古人是分别叙述其方法的，也没有说明其间的联系。但它们所用术语和表达方式都相近，又列入同一章，说明他们把这3种情形当作同一类型来处理。实际上，经过变通，后两种情形都可以化为第1种情形：对于 b_1 、 b_2 都是盈的情形，可以视为盈 b_1 和不足 $(-b_2)$ ，对于 b_1 、 b_2 都是不足的情形，可以归视为盈 $(-b_1)$ 和不足 b_2 的情形。对于盈适足、不足适足的情形，可以分别视为 $b_2=0$ 、 $b_1=0$ 的情形。这样，3种情形都可以统一地进行处理。不过，《九章》还没有明确的数值零概念，负数概念虽见于其《方程》章，但未见于包括盈不足章在内的其他章节。所以古人对这3种盈不足方法没有做统一的表述，是自然的。很可能在盈不足方法产生的时候，还没有明确的负数概念和作为数值的零概念，至少它们还没有进入程序化计算的知识系统中。下面将讨论的《算数书》中已有负数概念(称为“负算”)，而此书出土于约公元前186年下葬的张家山247号汉墓中，这说明负数的出现不晚于公元前2世纪初期，很可能还要早一段时间。因此，盈不足术的产生还应该更早一些。

2 《算数书》中的盈不足问题

《算数书》中已有盈不足问题，这些材料不仅能够直接说明盈不足方法的

出现不晚于公元前 2 世纪初期，而且通过分析，可以断定这种方法产生于更早的时期。

该书共有 3 条文献涉及盈不足问题，现据《张家山汉墓竹简[二四七号墓]》所作的释文引用，原释文用繁体字，今改为简体。原释文的补字、改字分别用符号【】、〈〉标识，今一仍其旧。原释文用圆括号标明通假，亦从之，但“术”和“術”在简化字系统中归并为术，今径作“术”，不再标识通假。引文中用方括号标识的印度—阿拉伯数字，系本文作者区别内容的标志：

1 分钱 [1] 分钱人二而多三，人三而少二，问几何人、钱几何。得曰：五人，钱十三。赢（盈）、不足互乘母，【并以】为实，子相从为法。[2] 皆赢（盈）若不足，子互乘母而各异直（置）之，以子少者除子多者，余为法，以不足为实。

2 米出钱 [1] 粝〈糲〉米二斗三钱，粝米三斗二钱。今有粝、糲十斗，卖得十三钱，问粝、糲各几何。曰：糲七斗五分三，粝二斗五分二。术曰：令偕（皆）粝〈糲〉也，钱赢（盈）二；令偕（皆）糲〈粝〉也，钱不足六【钱】少半^①。同赢（盈）、不足以为法，以赢（盈）乘十斗为糲〈粝〉，以不足乘十斗为粝〈糲〉^②，皆如法一斗。[2] 米斗一钱三分钱二，黍斗一钱半钱，今以十六钱买米、黍凡十斗，问各几何，用钱亦各几何。得曰：米六斗、黍四斗，米钱十、黍【钱】六。术曰：以赢（盈）不足，令皆为米，多三分钱二；皆为黍，少【一】钱。下有三分，以一为三，命曰各〈多〉而〈二〉^③少三，并多而少为法，更异直（置）二、三，以十斗各乘之，即贸其得，如法一斗。

3 方田 田一亩方几何步？曰：方十五步卅一分步十五。术曰：方十五步不足十五步，方十六步有徐（余）十六步。曰：并赢（盈）、不足以为法，不足子乘赢（盈）母，赢（盈）子乘不足母，并以为实，复之，如启广之术。（[4]，265—266、272 页）

虽然《算数书》在出土时已有一定程度的散乱，但这本竹简书是编成卷轴放入墓中的，且它的绝大部分竹简在出土时还连成一片，所以从竹简的出土位置仍能大致地看到原书编排的一些情况。从上面 3 个用到盈不足方法的条目在出土竹简中的分布（[4]，321 页）来看，如果考虑到原来是编成一个卷轴的，那么第 1 条的两支简（整理号 133、134 号，对应的出土号分别是 165、150 号）是挨在一起的。第 2 条的两个问题，各占有 3 支竹简，第 1 个问题的 3 支简（整理号 135、136、137 号，出土号分别为 108、107、106 号）连在一起，第 2 个问题的 3 支简（整理号 138、139、140 号，出土号分别为 122、121、120 号）也连在一起，但两组简有一定距离，不过还是比它们与其他两条离得近。第 3 条含有两支竹简（整理号 185、186 号，出土号分别为 38、51 号），不挨在一起但距离较近。3 条之间的彼此之间都相隔很远，这似乎是《算数书》的编者没有把它们归为一类的反映。也就是说，《算数书》的编者把 3 个盈不足方法问题安排到一本书中时，并没有从方法相近的角度来进行编排。事实上，第 1 条和钱财问题放在一起，第 2 条的两个问题和粮食问题放在一起，第 3 条和田地面

^① 两“五分”之后，整理小组各补有一“斗”字，“少半”之后整理小组补“钱”字，均无必要。郭书春先生曾就《算数书》中分数的表达方式不统一的情况有解释^[9]。

^② “为粝”、“为糲”之后，整理小组各补一“实”字，似无必要。这应看成是当时一种行文上的省略。同样，下文“即贸其得”之前整理小组补“为实”，似亦非必要。郭书春先生即不补^[9]。

^③ 原文“各而”疑当作“多二”，参考彭浩先生意见^[10]校勘。郭世荣先生校“各而”为“多二而”^[11]，亦通。

积问题放在一起。这些似乎说明《算数书》的编著者并没有把它们作为说明盈不足方法的例题。也就是说，《算数书》中的盈不足问题并不是被作为一个整体来编入书中的。这也正是《算数书》是一本撮编之作^[6]的体现。下面我们参照《九章》的盈不足章对上引3个有关盈不足问题的条目做一考察。

第1条分为两个独立的部分。第[1]部分是一个一盈一不足的例题及其解法。解法中用到赢、不足、母、子、实和法六个在例题中没有出现的名词，从词义上能明显地看出，赢和不足分别是例题中多和少的数量（“多三”、“少二”）。后面四个名词如果单从上下文看则不易了解其具体所指。参照《九章》的盈不足术，可知母是指每次假设时的人均分得的钱数（例题中“人二”、“人三”），子就是相应的盈和不足^①。实和法的意义与《九章》相同，也就是上面的式（1）和式（2）。“分钱”条原文没有就这个问题做更多的说明。显然，单从已经写出的文字，容易想到的只是下面要做一个“实如法而一”即用法除实的工作，这样算出的结果是使得要分的那笔钱恰好分完的人均分得的钱数，相当于上面的式（3）。不过原文并没有提到这层意义。特别值得注意的是，这个结果显然不是问题所需要的答案，而且它和问题的答案也没有直接的关系。如果作者不知道上面的（5）和（6），很难设想古人能得到问题的答案。所以，我们认为作者是知道盈不足术的完整方法的。他给出了式（1）和（2），而没有给出后半部分（5）、（6）。由于（1）和（2）分别是（5）和（6）中的被除数，所以这说明这个问题的作者是在已知（5）、（6）的前提下提示如何计算（5）、（6）中两个关键的被除数（实、法）^②。

第1条的第[2]部分应是针对两盈、两不足情形的方法。这段文字显然读不通，而且也很难校勘。整理小组认为后面的“不足”为衍文，“为实”前脱“少减多余”，然后将复原后的结果移到“各异直之”之后，这样就把“子互乘母”之后的文字校勘为“子互乘母而各异直之，以少减多，余为实，以子少者除子多者，余为法”。这个处理改动较多，且“各异直之”与下面的文字不太连贯。我们从上下文意义和用语来考虑，试校如下：将末句中“不足”改为“少除多”，再将末句与“各异直之”对调，这样得到“子互乘母”以下的校正文字为：“子互乘母，以少除多，为实；以子少者除子多者，余为法，而各异直之。”由于校勘没有改变用语、也没有增加数学意义，因而不会影响我们下面的分析。显然，著者也同样只是给出了两个关键的数“实”和“法”的计算方法，即计算上面式（9）和（10）中的被除数的方法，而没有提到公式（9）和（10）及其中的除数，这也是说明著者是在已知（9）和（10）的情况下提示如何计算其中的两

^① 古克礼先生认为既然赢和不足“相从为法”（相加作为除数），那么它们不应该是“子”而应该是“母”。于是他把第1部分的“母”和“子”互换了。另外，他还认为第2部分的“母互乘母而各异直之”中前“母”字亦应作“子”（[7]，136页）。其实第2部分中他改为“子”字的那个“母”字，是他转写之误。此“母”本来就作“子”字，无论据整理者的释文还是原简照片（[4]，94页第134号简）都是如此。第1部分两个改动恐不正确。在《九章》盈不足术的后段说“并盈不足为实，以所出率以少减多，余为法”，可见《算数书》把赢、不足称为子（对应于实），把人均分钱数称为母（对应于法）是很自然的。这也与第3条的用法相一致。

^② 苏意雯等先生认为原文说明了计算每人应得钱数的方法^[12]，这意味着原文需要补字。郭书春先生认为第1条第[1]部分末尾脱“母以少减多，余，以约法、实，法为人，实为钱”^[9]，从而使之不仅含有计算每人所得钱数的方法，而且含有人数和总钱数的计算方法。这里补了16个字，数目较多。出现这种情况的最大可能性是脱了一支简。但第[1]部分全在一支简（整理号133号）上，且这支简除含有第[1]部分外，还紧接了第[2]部分的前3个字“皆赢若”。而第[2]部分接下来的文字又仅占有另一支简（整理号134号）的约5分之3部分。可见第1条在《算数书》埋入后至今没有残缺。这至少说明“分钱”条在《算数书》这个抄本中原本就是如此。从第3条也没有给出完整的术文来看，这里脱落那么多文字的可能性不大。

个被除数。

第 2 条分为两部分，是两个题目及其解法。这两个题目的题设并没有出现盈和不足这样的条件，而是在解法中通过两次假设，得到盈和不足两个数，从而把问题化为盈不足问题，再用盈不足术求解。

第 1 个问题的文字存在“粝”、“糲”互误的情况，整理小组认为有 2 种方案，一种如上所引，以糲价贵于粝，即把第 1 个“粝”字改为“糲”，然后相应改动后面的文字。另一种方案是以粝贵于糲，把第 2 个“粝”字改为“糲”，于是“以下相关文字须做相应更动”（[4]，266 页）。实际上，这时下面文字所需更动是把答案中的“糲”和“粝”互换。郭世荣先生也认为有这么 2 种方案，他认为前者与《算数书》中另两条中“粝十糲九”相一致，但他依然倾向于后者^[1]。大概是觉得后者改字较少的缘故。古克礼先生亦采用第 2 种方案。但没有改动后面的文字，这是他的疏忽。事实上，他解释古人的计算过程时得到的答案就是粝为 $7\frac{3}{5}$ 斗，糲为 $2\frac{2}{5}$ 斗（[7]，86、136—137 页）。这正好说明答案“糲

七斗五分三，粝二斗五分二”中“粝”和“糲”需要互换。我们则认为第 1 种方案可取。因为把粟舂成米，粗的为粝，较细的为糲，糲可由粝加工而成，当时的加工标准是粟、粝、糲的比为 50: 30: 27。如果按第 2 种方案，粝比糲还贵。可是我们很难想像量少质细又更费事的糲反而比量多质粗的粝更便宜。第 2 个问题中，米就比黍要贵（若非特定语境或无特别说明，古代的“米”通常指“粝米”。《算数书》“程禾”条规定 1 石重的黍舂为粝米 10 斗）。

第 2 条中的 2 个问题都是通过假设两次把问题化为盈不足问题来求解。每个问题的两次假设，都取极端值（每种粮食可能的最大值），实际可以理解为 4 次假设。例如第 1 个问题：假设都是糲（10 斗）时盈钱 2，就意味着粝没有时盈 2；假设都是粝（10 斗）时不足钱 6 又 3 分之 1，就意味着糲没有时的不足钱数也是 6 又 3 分之 1。所以两次假设可以理解为：糲为 10 斗时盈钱 2，糲没有（即 0）时，不足钱 6 又 3 分之 1；粝没有（即 0）时盈钱 2，粝为 10 斗时不足钱 6 又 3 分之 1。这样就可以分别用盈不足方法来求解。其解法不仅有实和法的计算，而且有用法除实的说明，这些相当于上面的（1）、（2）和（3）三式。因此，原文关于计算两种粮食（糲和粝，米与黍）的算法是完整的。但第 2 个问题要求的买米和黍所需要的钱数，《算数书》却没有一字涉及。因此，虽然由米和黍的多少可以计算出相应的钱数，但作为算法，《算数书》的文字却是不完整的。另外，从表述形式看，第 2 条解法的叙述文字中对法的计算是一种普遍性的描述（“同赢、不足以为法”，“并多而少为法”），而描述实的计算时则用到问题的具体数字（“以赢乘十斗为粝〈的实〉，以不足乘十斗为糲〈的实〉”，“更异直二、三，以十斗各乘之，即贸其得”），但如果把相应的数字换为一般的用语也是成立了，所以这种方法实际也是具有普遍性的。

第 3 条要求的是一个面积为一亩（240 平方步）的正方形的边长。这个问题的准确解是将 240 平方步开方。《算数书》的著者没有用开平方的方法，而是用两次假设进行验算，得到盈和不足两个数据，再用盈不足术求解。在解法中，对实和法的计算给出了两个普遍性的描述，相当于式（1）和式（2）。原文也没有“实如法而一”之类的话，这也可以视为著者省略了记录这一步骤的文字。

第 2 条和第 3 条都是通过假设两次把一般问题化为盈不足问题来解。但它们有所不同。第 3 条是从由假设数算出的总数（边长 15 步时，相应的总数为 225 平方步；边长 16 步时，相应的总数为 256 平方步）中减去已知的总数（240 平

方步), 够减且有余则为盈, 不够减则为不足。所以导致盈的假设数是那个较大的数, 导致不足的是那个较小的数。这与第 1 条“分钱”结构相反而与《九章》“共买物”相同。第 2 条两个问题的任何一个实际都用到了“分钱”和“共买物”两种结构^①。可见, 当时《九章》中盈不足问题的基本结构在《算数书》时代已经具备。

3 从《九章算术》和《算数书》的盈不足问题看上古时代的盈不足方法

虽然《九章》有 20 个盈不足问题, 比《算数书》多了 4 倍, 但《算数书》含有一盈一不足、两盈两不足和通过两次假设把一般问题化为盈不足问题求解这三种类型, 与《九章》相比, 只缺少盈适足和不足适足这一类型。另外, 《九章》“共买物”的数学结构在《算数书》时代也已具备。因此, 比较两本书的盈不足内容, 已经能说明相当多的问题。

3.1 《算数书》的盈不足问题对《九章算术》没有直接的影响

如上所述, 两书都有三种类型的盈不足问题, 这种共性说明它们之间一定有某种关系。但是, 这并不意味着《算数书》对《九章》的盈不足方法有直接的影响。首先, 两书没有一个题目是相同的。其次, 对于一盈一不足类型, 《九章》是出钱, 《算数书》是分钱, 情况正好相反, 所以当《九章》中人均出钱数多导致盈(总数超过物价)、人均出钱数少导致不足(总数比物价少)时, 《算数书》人均分钱数多则导致不足, 而人均分钱数少则导致盈。同样地, 对两盈两不足的情况, 《九章》中的两个人均出钱数, 其较大者对应较大的盈数或较小的不足数, 而《算数书》中的两个人均分钱数则会出现较大者对应于较小的盈数或较大的不足数, 情况也正好相反。第三, 《算数书》第 2 条的两个问题, 在通过假设化为盈不足问题来解时, 都取了两个极端情况下的假设数(假设都为粝, 及假设都为稗); 而《九章》的假设数除一个问题外, 其他的都取中间值, 而不取这种极端数。而这个取极端数的问题是讲如何求出含有玉的石头中玉、石含量的, 与《算数书》计算粮食的数量相比, 其讨论对象相去甚远。第四, 《算数书》中的“方田”条用盈不足术求解已知面积一亩的正方形田之一边, 类似问题在《九章》中用开方法解决, 而与盈不足方法没有关系。这些情况说明《九章》的盈不足章没有继承《算数书》的盈不足类问题。另外, 两书盈不足方法的用词有区别。《算数书》既没有《九章》的“所出率”一词, 也没有与之相应的“所分率”或“所得率”, 而是用“母”字来表达; 并且《算数书》把盈数和不足数称为“子”的用法也没有出现在《九章》中。所以《算数书》虽然比现传汉代编定本《九章》早一个多世纪, 但看不出其盈不足问题对《九章》有直接影响的痕迹。

3.2 《算数书》的盈不足问题是受《九章算术》先秦祖本的某种影响而形成的

从第 2 节可知《算数书》有关盈不足的 3 个条目中, 存在一些明显的讹误, 说明它们是抄自更早的版本或书籍。因此, 盈不足问题和方法一定会比墓主去

^① 这是从假设数与盈或不足的变化关系上说的。

世的公元前 186 年要早一些时间。《算数书》关于盈不足的 3 条所给出的方法，第 1 和第 3 条都不完整，第 2 条的第 2 个问题也有一半的答案是缺少解法的。尽管如此，3 条的答案都是正确的。这说明它们的著者知道完整的方法。另外，尽管《算数书》没有“共买物”问题，但第 3 条和第 2 条都说明当时已有针对“共买物”问题的盈不足方法。再者，《算数书》是一本撮编之作，上面所引 3 个有关盈不足方法的条目，有可能部分或全部取材于更早的著作，亦不排除是编者所撰的可能性。不论 3 条的文字是开始撰成时就不完整，还是后来抄录或编辑时被删去或省略了部分文字，它们的著者都应该知道相应的完整的盈不足方法。3 个条目中不完整的表达方式，说明了编著者是在已知 3 种类型盈不足问题的完整解法的前提下，针对一些关键点进行或多或少的提示。因此，3 种类型盈不足问题的解法的形成，还会比这几条的形成时间更早一些。另外，上面提到盈不足方法可能比负数的使用要早，而《算数书》已有负数，这也增加了盈不足方法比《算数书》撰成要早相当长时间的可能性。由于从秦统一到《算数书》下葬只有三十多年，所以从《算数书》本身可以推知，盈不足方法极有可能在先秦时期就已经出现了。

郑众（？—公元 83 年）注《周礼》“九数”云：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、夕桀、勾股也”^[13]。说明不像重差、夕桀、勾股是汉代才产生的数学科目，“赢（盈）不足”是先秦已有的数学分支。刘徽注《九章算术》的序言说：“周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣。”“往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也”（[8]，序言 1 页）。他认为先秦时“九数”即已发展成为一本《九章算术》，但秦始皇焚书导致它散坏，入汉以后张苍（？—公元前 152 年）、耿寿昌（活动于公元前 1 世纪中期）收集它残存的部分，采用一些当时的语言并进行删补而形成《九章》，于是《九章》和“九数”的名目便稍有出入。对照郑众和刘徽的记述，可以推知《九章》的盈不足章源自先秦的数学经典——汉编《九章算术》在先秦的祖本。这与上面对《算数书》中盈不足类问题所做的考察是一致的。而如果考虑到《九章》是有长久历史渊源的经典著作，那么可以推知《算数书》盈不足问题，很可能是在《九章》的先秦祖本的影响下撰写的^①。这一点还可以从《算数书》盈不足问题本身来考察。首先：上面所引第 1 条的第[1]部分有正确的答案，而所给出方法只是《九章》盈不足术的前面部分即式（1）和式（2），但必须要有盈不足术的后面部分即式（5）和式（6）才能算出正确的答案。第 1 条第[2]部分也只是两盈两不足术的前面部分，即式（9）和式（10）中的被除数（分子），而没有后面的环节。这显然说明编著者在已知完整的盈不足术和两盈两不足术的前提下提示其中的部分计算步骤。其次，第 3 条也没有完整的盈不足术，只有前面两步，即式（1）和（2），缺少式（3）。第 2 条虽然有完整的步骤，但从行文看，较为随意，如其中第 2 个问题说到用盈不足术时说“以盈不足”，缺少“术”、“法”之类的字眼^②，而第 1 个问题则连这句话都没有，进行两次假设得出盈和不足两个数字之后，给出的描述计算方法的文字“同赢、不足以为法，以赢乘十斗为粝，以不足乘十斗为糲”

^① 邹大海提出上古时期中国算法式数学著作存在着经典和非经典两个系统，“九数”、《九章》的先秦祖本为前者，《算数书》及其所取材的著作属于后者。^[14]

^② 比《九章算术》晚几百年的《孙子算经》（如卷下第 29 题：“以盈不足取之。假令……”^[15]）、《张丘建算经》（如卷中第 18 题：“以盈不足为之，亦得”^[16]）也有类似的情形。

也表述得不太清楚。细绎这些文字，我们发现这两个问题很有练习题的味道。因此，《算数书》关于盈不足的材料，只能是取材于较正式的著作或在其影响下形成的。考虑到《九章算术》在先秦的祖本的经典地位和久远历史，这种较正式的著作要么是《九章》在先秦的祖本，要么是其衍生本。

3.3 盈不足方法的起源

盈不足术是如何得来的，《九章算术》本身没有交代。公元 3 世纪刘徽用率概念（与比和比例观念相似而更为广泛的概念）和齐同原理（比分数通分更为广泛的方法，对应于率的运算），解释了盈不足方法的得来。其细节虽可能不完全符合历史，但由于先秦时期已广泛使用分数，当时已掌握了分数的各种运算方法，率概念也已经得到应用^[17]，所以刘徽的解释确能反映古代得出盈不足方法的路径和手段。事实上，如上所述，每次假设数（即《九章》所谓“所出率”）、盈数和不足数在《算数书》中分别用母和子来称呼，正说明盈不足方法的产生与分数观念及其方法密切相关。李继闵先生^[18]说：“盈不足术就是古代数学中假设试验与推理论证两种方法交互运用的产物”。他按照刘徽的思路推导了盈不足术，但没有具体追溯盈不足方法的起源。

盈不足方法是如何产生的，这在目前还不能从先秦的材料中找到直接的证据。但是，促使盈不足方法产生的条件和背景还是可以找到踪迹的。先秦文献有大量材料提到事物有余和不足的情形，需要对它们进行调整。如《管子》“事语”篇载管子曰“彼天子之制，壤方千里，齐诸侯方百里，负海子七十里，男五十里，若胸臂之相使也。故准徐疾、赢不足，虽在下也，不为君忧”（[19]，535 页），说大国的治理，只要根据事情的缓急和粮食财物的有余和不足进行调整，那么即使粮财散在民间，也不会成为君主所担忧的事。“轻重乙”篇载管子说“天子中立，地方千里，兼霸之壤三百有余里，佻诸侯度百里，负海子男者度七十里。若此，则如胸之使臂，臂之使指也。然则小不能分于民，推〈准〉徐疾、羨不足，虽在下不为君忧”（[19]，606 页）。这和“事语”篇语极相似，当有共同的来源或承接关系。《管子》“国蓄”篇说“然则人君非能散积聚，钧羨不足，分并财利而调民事也，则君虽彊本趣耕而自为铸币而无已，乃今使民下相役耳，恶能以为治乎？”“人君知其然，故视国之羨不足而御其财物。谷贱则以币予食，布帛贱则以币予衣。视物之轻重而御之以准。故贵贱可调而君得其利”（[19]，544—545、548 页）。“羨”也是多余即盈（赢）的意思。前一段说明，如果人君不能把积聚的粮食分散给贫困者，调节有余和不足，适当地分散和收集财物进行有效的调济，那么即使加强农业生产、不断地铸造货币，也只能使人民互相奴役，而不能让国家得到治理。后一段说明，人君应该根据国家财物的有余与不足来安排使用财物。例如谷物太便宜的时候就用钱来补贴粮食，布帛太便宜的时候就用钱来补贴布帛。考察财物的多少、贵贱，进行适当的调节，使之达到一个合适的程度，这样就能使财物的贵贱得到调节而同时国君也能得到他的利益。“乘马”篇强调了黄金在经济工作中的重要性：“黄金者，用之量也。辨于黄金之理则知侈敛，知侈敛则百用节矣。故敛则伤事，侈则伤货。俭则金贱，金贱则事不成，故伤事。侈则金贵，金贵则货贱，故伤货。货尽而后知不足，是不知量也；事已而后知货之有余，是不知节也。不知量，不知节，不可谓之有道。天下乘马服牛，而任之轻重有制。有壹宿之行，道之远近有数矣。是知诸侯之地千乘之国者，所以知地之小大也，所以知任之轻重也。重而后损之，是不知任也；轻而后益之，是不知器也。不知任，不知器，不可

谓之有道。”（[19]，44 页）这里说明，黄金是计量财物的工具。从黄金可以计量和了解奢侈和节俭。金贵则货物太便宜，影响商品经济。金贱则货物太贵，影响各项事业的完成。不能在事情结束后才知道货物是有余还是不足，要懂得计量，懂得调节。从了解一个晚上的行程，就能做到对整个道路心中有数；由能出兵千乘的诸侯国的大小，可以推知国家土地的大小和它的负担能力。不要在发现国家整个的负担太重之后才知道要减损它，或在发现整个国家负担太轻之后才知道要增加它。这里涉及价格、远近、多少等因素，也谈到出现过多、过少，要计算要调整等情形。先秦的平准政策，实际就和这些情形有关或相似。平准是要根据各地的不同年成和物价，调整不同地区的租税。由于经济生活中合适的数字有时是不容易直接得到的，这时人们容易想到在导致过多或过少的两个数字之间取某个中间值。由于需要事先预知事后可能发生的情况，探索有效的算法就成为必要。通过估算和不断摸索，最终利用分数的性质及其算法或与之密切相关的率概念和齐同方法找到了盈不足方法（参考[17]，152-155 页）。《算数书》中盈不足问题没有用到率概念，而用到子、母这两个词，这或许能反映盈不足方法产生初期的一些信息。大概先得到的是一盈一不足的方法，然后是两盈两不足的方法。至于不足适足或盈适足方法，则是前者的自然简化。初时，盈不足方法可能是根据实际生活中已经出现的盈和不足的情形来找到合适的中间数值。后来，这种方法的应用范围得到扩大，通过假设两次得到盈或不足两种情形，从而把更一般的问题化为盈不足问题，使之可以套用盈不足方法来解决。这样，盈不足方法就成为一般的方法了，尽管它在有的情况下只能得到答案的近似值。

4 结语

综上所述，盈不足方法在上古时代的形成、发展和流传可表示如下：

在社会实际中出现盈和不足的情形，通过取中间值来估算合适的数值以调节事物的多少，以适应实际的需要。后来，利用比和比例相关的率概念、分数的性质和齐同方法，促成了盈不足方法的形成。初时为一盈一不足术，之后是两盈、两不足术，以及盈适足、不足适足术。再通过两次假设产生盈、不足情形，把一般问题化为盈不足问题来求解。这些方法应该在先秦时期出现，是先秦“九数”的一个科目，并记录于汉编《九章算术》在先秦的祖本中。很可能受《九章》先秦祖本间接或直接的影响，在先秦或秦汉时期出现了很多盈不足问题，《算数书》中盈不足问题即属于这种材料。后来《算数书》的编者从这种材料中采用一部分编入《算数书》中（也有可能《算数书》的编者编写了其中的个别问题）。而西汉张苍、耿寿昌整理《九章》时，主要继承了《九章》在先秦的祖本中的盈不足方法和问题，并进行加工和删补，形成了现传《九章》中的盈不足章。《算数书》的盈不足问题则没有对张、耿编辑《九章》产生直接的影响，因而《九章算术》中也就没有一个问题来自《算数书》。

参 考 文 献

- 1 钱宝琮.《九章算术》盈不足术流传欧洲考[J]. 科学, 1927, 12 (6): 701—714.
- 2 刘钝.“盈不足”、《算数书》与《西镜录》[M]. 历史、考古与社会——中法学术系列讲座. 第9号. 北

- 京：法国远东学院北京中心编印，2005.
- 3 钱宝琮. 中国古代数学史话[M]. 北京：中国青年出版社，1957. 8, 30.
- 4 张家山二四七号汉墓竹简整理小组. 张家山汉墓竹简[二四七号墓][M]. 北京：文物出版社，2001.
- 5 邹大海. 初观《算数书》. 中国文物报，2001-03-04：7.
- 6 邹大海. 出土《算数书》初探[J]. 自然科学史研究. 2001, 20 (3) 193—205.
- 7 Christopher Cullen. *The Suàn shù shū* 算数书 ‘*Writings on reckoning*’: A translation of a Chinese mathematical collection of the second century BC, with explanatory commentary [M]. Needham Research Institute Working Papers: 1, 2004.
- 8 九章算术[A]. 算经十书[M]. 郭书春校点. 沈阳：辽宁教育出版社，1998.
- 9 郭书春. 《算数书》校勘[J]. 中国科技史料，2001, 22 (3): 202—219.
- 10 彭浩. 张家山汉简《算数书》注释[M]. 北京：科学出版社，2001. 100.
- 11 郭世荣. 《算数书》勘误[J]. 内蒙古师大学报（自然科学汉文版），2001, 30 (3): 276—285.
- 12 苏意雯, 苏俊鸿、苏惠玉等. 《算数书》校勘[J]. HPM 通讯（台北），2000. 3 (11): 2—20.
- 13 孙诒让. 周礼正义[M]. 长沙：商务印书馆，1938. 第七册 49.
- 14 邹大海. 从《算数书》与《九章算术》的关系看算法式数学文献在上古时代的流传[J]. 赣南师范学院学报，2004, (6): 6—10.
- 15 孙子算经[A]. 算经十书[M]. 郭书春校点. 沈阳：辽宁教育出版社，1998. 23.
- 16 张丘建算经[A]. 算经十书[M]. 郭书春校点. 沈阳：辽宁教育出版社，1998. 23.
- 17 邹大海. 中国数学的兴起与先秦数学[M]. 石家庄：河北科学技术出版社，2001. 115—120.
- 18 李继闵. 盈不足术探源[A]. 吴文俊. 《九章算术》与刘徽[M]. 北京：北京师范大学出版社，1982. 263—273.
- 19 颜昌峣. 管子校释[M]. 长沙：岳麓书社，1992.

The Method of Excess and Deficiency in Early China: An Investigation on the Basis of the Problems of Excess and Deficiency in the *Suanshushu*

ZOU Dahai

(Institute for the History of Natural Science, CAS, Beijing 100010, China)

Abstract The method of excess and deficiency that had general applications was important in ancient mathematics. Systematically considering the unearthed *Suanshushu* (算数书, Writings on reckoning), the *Nine Chapters on Mathematical Procedures* and other sources, this paper discusses the formation and spread of this method in Early China. It argues that in Pre-Qin Period, there often appeared the situation that some thing was more in one case while was less in the other. In order to find the proper amount, ancient mathematicians created a method to tackle the problem on the basis of knowledge about rate, proportion and fraction. This method and its applications constituted a branch of mathematics in Pre-Qin China, which was recorded in the forerunner edition of the *Nine Chapters*. Influenced by it directly or indirectly, scholars in Pre-Qin to Han Period designed many problems of this method for social needs. And a few of the problems were compiled into the *Suanshushu*.

Key words method of excess and deficiency, *Suanshushu*, *Nine Chapters on Mathematical Procedures*, mathematics in Early China